

非線性懸吊彈性樑及端點減振器之研究

王怡仁，張家嫻

淡江大學航太系

E-mail：090730@mail.tku.edu.tw

摘要

本研究考慮一 Bernoulli-Euler Beam 之彈性樑以鋼纜懸掛，而鋼纜以非線性彈簧與線性阻尼組成，彈性樑的一端為鉸接邊界支撐，另一端則掛載時變之動態減振器 (DVA)。本研究因具有時間變化之邊界條件，所以採用 Mindlin-Goodman 法分析此問題。此外本文使用多尺度法解析此非線性系統，發現系統中第一模態及第二模態存在一對三的內共振情形，並繪製系統於穩態固定點的情況下，各模態的頻率響應圖，以觀察其非線性內共振現象，且以數值模擬其時間域之振動情形，相互驗證之。另外本研究將分析 DVA 的質量及彈簧係數對於整個系統之減振影響，並提出最佳的質量與彈簧係數組合，可使系統達到最佳減振效果。最後，吾人以一簡單的空氣動力函數模擬氣流對於本彈性樑系統之阻尼的影響，利用 Floquet Theory 搭配 Floquet Multipliers (F.M.) 判定法則，繪製出 Basin of Attraction 圖形，觀察此系統之穩定性，以獲得最後結論。

關鍵詞：非線性、內共振、振動模態、動態減振器

The Study of A Nonlinear Suspension Elastic Beam with An End Point Dynamic Vibration Absorber

Yi-Ren Wang, Chia-Man Chang
Tamkang University

Abstract

This study investigated the performance of a mass-spring dynamic vibration absorber (DVA) at the free end of a hinged-free elastic beam under simple harmonic excitation. This beam system was suspended by suspension cables. These cables were simulated by cubic nonlinear springs to examine the nonlinear characteristics of this system. This time-dependent non-homogeneous boundary condition problem was solved by Mindlin-Goodman method. The method of multiple scales was performed to solve the nonlinear equations. The 1:3 internal resonance was found at the 1st and 2nd modes of this beam system. The fixed point plots were obtained and compared with the numerical results to verify the system internal resonance. The Poincaré Map was also utilized to identify the system instability frequency region of the jump phenomenon. The optimal DVA mass and the spring constant were provided for best beam vibration reduction. Finally, the wind speeds and aerodynamic loads were included to investigate the stability of this system. The system stability was analyzed by Floquet theory and Floquet multipliers. The basin of attraction charts were made to verify the effects of the combinations of DVA's mass and the spring constant at diverge speed.

Keywords：Nonlinear, Internal Resonance, Mode Shape, Dynamic Vibration Absorber.

一、前言

振動所帶來的影響，小至機械元件大至飛機機翼與橋樑工程…等，都可能造成疲勞、零件鬆脫、乃至於破壞，這些全是工程師於設計及分析時該慎重考量的一環。非線性系統的振動問題在振動之研究中一直扮演舉足輕重的角色，也早有很多人研究過，如 Nayfeh 和 Mook [1] 針對非線性系統的解析提出多種解法，其中由於多尺度法利於分析具阻尼的振動系

統，因此也廣為被一般人使用。此外，該書中並對於非線性系統中特有的內共振現象有詳細的解釋；若系統各個自由度之自然振動頻率彼此存在倍數關係時，激擾高頻率卻會使低頻率產生較高的振幅。另外，Nayfeh 和 Balachandran [2] 在書中說明了非線性系統各種穩定情況的定義，及各種系統穩定性的判斷方法，對於吾人之於系統穩定性分析有極大之參考價值。

對於本研究之主體-樑 (Beam) 而言，樑可說是

工程結構的基本要素之一，應用非常廣泛，像是橋樑、吊橋甚至是鐵軌等等，因此樑常作為學者研究的方向之一，而其中振動對於樑的影響又以內共振最為值得探討。Eftekhari 等人 [3] 考慮一複合材料之懸臂樑，一端為固定端，一端為自由端，並在自由端附加一類似本研究的 DVA 減振器，且同樣也是利用 MOMS 分析產生內共振的可能性，並選擇與減振器參數相對應之自然振動頻率，產生二對一和一對一之內共振條件，以嘗試找出減振的方法。顯然，直到最近，類似這樣的研究其實一直是大家感興趣的。另外 Van Horssen 和 Boertjens [4] 則以一吊橋受到非線性空氣動力影響為主要架構，並以線性彈簧模擬懸吊鋼纜。他們的研究對於複雜的流固耦合系統，提出一套精闢的數學分析方法，對於後續相關的研究模型分析極有幫助。

振動影響著機構原件的穩定性，且在長期的振動下容易造成材料疲勞，甚至於結構破壞，因此減振方法也是歷年來學界研究的重點之一。減振的方法琳瑯滿目，其中又以調質式阻尼減振器 (TMD) 系統最廣為使用，且動態減振器 (DVA) 也是 TMD 的其中一種。如 Hijmissen 和 Van Horssen [5] 的研究模型則為直立且下端固定之 Bernoulli-Euler Beam，上端有一彈簧、阻尼和質量所組成的減振器 (TMD) 以抑制樑的橫向振動。另外 Zou 和 Nayfeh [6] 針對線性振動的問題，利用改良後，具有雙自由度的 TMD 系統做減振，發現效果優於單一自由度或更多自由度的減振器。Wang 及 Lin [7] 則針對非線性振動的問題，以兩個自由度之 TMD 系統的設計，以避開內共振 (Internal Resonance)，並找出最佳減振效果的減振器擺放位置。由於本研究放置於樑之端點的減振器為與時間有關的邊界條件，此種問題吾人可參考 Mindlin 和 Goodman [8] 提出之延展分離變數法，將具非齊次性的邊界條件轉化成齊次性邊界條件，以求解具有各種時變性的邊界條件之樑的振動問題。上述各種文獻回顧及其相關應用的介紹，皆闡明本研究深具實際應用之潛力。

二、系統理論模式之建立

2.1 非線性運動方程式之推導

本研究將考慮一線性 Bernoulli-Euler Beam 之彈性樑，其一端為鉸接的邊界支撐，另一端為自由端並掛載一時變函數的動態減振器 (TDB DVA)。而彈性樑則以鋼纜懸掛之，此鋼纜將以非線性彈簧與線性阻尼的組成來模擬其運動。本研究並考慮主體受到一簡諧外力及簡易空氣動力之影響，如圖 1 所示，以擴展本研究之應用範圍。首先，藉由 Bernoulli-Euler Beam 及彈性懸吊系統之彈性力可得出系統之運動方程，將原式無因次化後並簡化，可改寫為下列形式如下式，

$$\begin{aligned} & \bar{w}^{**}(\bar{x}, \tau) + \bar{w}^{''''}(\bar{x}, \tau) + \nu \bar{w}^*(\bar{x}, \tau) + \bar{\omega}^2 \bar{w}(\bar{x}, \tau) + \hat{K} \bar{w}^3(\bar{x}, \tau) \\ & = \hat{f} \sin(r\tau) + \hat{a}_{0U^2} a_0 + \hat{a}_{1U} a_1 \bar{w} \end{aligned} \quad (1)$$

其邊界條件可表為以下之情況，

$$\begin{aligned} & \bar{w}(0, \tau) = 0, \quad \bar{w}''(0, \tau) = 0 \\ & \bar{w}''(\bar{l}, \tau) = 0, \quad \bar{w}'''(\bar{l}, \tau) = \bar{m} \tilde{\omega}^2 [\bar{w}(\tau) - \bar{w}(\bar{l}, \tau)] \end{aligned} \quad (2)$$

而減振器之運動方程為，

$$\bar{\bar{w}} - \tilde{\omega}^2 [\bar{w}(\bar{l}, \tau) - \bar{\bar{w}}(\tau)] = 0 \quad (3)$$

2.2 非線性運動方程式之解析

為求出此非線性方程式之解析解，吾人採用多尺度法 (MOMS)，此方法是將時間分為時間變化劇烈與時間變化緩慢兩種尺度，令 $T_0 = \tau$ 為時間變化劇烈項， $T_1 = \varepsilon \tau$ 、 $T_2 = \varepsilon^2 \tau \dots$ 為時間變化緩慢項。並假設， $\bar{w}(\bar{x}, \tau, \varepsilon) = \bar{w}_0(\bar{x}, T_0, T_1, T_2, \dots) + \varepsilon \bar{w}_1(\bar{x}, T_0, T_1, T_2, \dots)$ (4) 將上式代入式 (1~3)，並假設結構阻尼、非線性彈簧即所有外力的項為 ε^1 ，則可將原方程式分為 ε^0 與 ε^1 。並由於減振器為線性，所以不需用 MOMS 法分成不同的時間尺度，只需考慮 ε^0 的運動方程即可。

由於本研究模型的邊界條件為非齊次性邊界條件，其自由端乃是施予時變的外力，因此可運用 Mindlin and Goodman [8] 所提出的方法，將具有端點減振器的樑之橫向振動位移函數 \bar{w}_0 分成兩部份，分別為轉換位移函數 $v_0(\bar{x}, \tau)$ 和廣義的邊界位移函數 $h_0(\bar{x}) \bar{w}_0(\tau)$ ，並藉由移位函數 $h_0(\bar{x})$ 造成轉換位移函數的邊界條件為齊次性。則可得到移位函數 $h_0(\bar{x}) = \frac{1}{l} \bar{x}$ ，並利用分離變數法，可得特徵值 $\gamma_n \approx 0.785 + n\pi$ 、轉換位移函數 $v_0(\bar{x}, \tau)$ 、線性振動模態 $\tilde{\Phi}_n(\bar{x})$ 如下式，

$$v_0(\bar{x}, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} \xi_{0n}(\tau) \tilde{\Phi}_n(\bar{x}) \quad (5)$$

而減振器的位移函數解：

$$\bar{\bar{w}}_0 = \sum_{n=1}^{\infty} C_m \xi_{0n}(\tau) \quad (6)$$

因此可得此彈性樑的橫向位移函數 \bar{w}_0 如下，

$$\sum_{n=1}^{\infty} \bar{w}_{0n}(\bar{x}, T_0, T_1) = \sum_{n=1}^{\infty} (\tilde{\Phi}_n(\bar{x}) + \bar{x} C_m) \xi_{0n}(\tau) \quad (7)$$

接下來吾人利用正交法解耦，由 ε^0 組成的項為：

$$\xi_{0m}^{**} + (\bar{\omega}^2 + \gamma_m^4 \hat{C}_{im}) \xi_{0m} = 0 \quad (8)$$

並令系統的自然振動頻率為 $\omega_{n_{WA}} = \sqrt{\bar{\omega}^2 + \gamma_m^4 \hat{C}_{im}}$ ，

由 ε^1 組成的項為：

$$\begin{aligned} \xi_{1m}^{**} + (\bar{\omega}^2 + \gamma_m^4 \hat{C}_{im}) \xi_{1m} = (\hat{a}_{1U} a_1 - \nu) \xi_{0m}^* - 2 \frac{\partial \xi_{0m}^*}{\partial T_1} + \hat{A}_m (\hat{f} e^{i\tau} + \hat{a}_{0U^2} a_0) \\ - \hat{K}_m \xi_{0i} \xi_{0j} \xi_{0k} \int_0^1 (\tilde{\Phi}_i(\bar{x}) + \bar{x} C_{ii}) (\tilde{\Phi}_j(\bar{x}) + \bar{x} C_{jj}) (\tilde{\Phi}_k(\bar{x}) + \bar{x} C_{kk}) \tilde{\Phi}_m d\bar{x} \quad (9) \end{aligned}$$

2.3 無減振器系統的理论模式之建立與分析

為了分析附加減振器之後，對於樑之振動的影響，吾人先討論在未加減振器時，主體架構的基本非線性及振動現象。減振器組合之系統即是系統的右端邊界條件為自由端，其主體及左端邊界條件與具減振器組合之系統無異，如圖 2。由於與具減振器系統理論模式之建立過程相同，因此以下內容將簡要描述之。無因次化的無減振器系統運動方程與式 (1) 相同，其邊界條件為：

$$\begin{aligned} \bar{w}(0, \tau) = 0, \quad \bar{w}''(0, \tau) = 0 \\ \bar{w}''(\bar{l}, \tau) = 0, \quad \bar{w}'''(\bar{l}, \tau) = 0 \end{aligned} \quad (10)$$

採用 MOMS 與分離變數法，求得特徵值 $\gamma_n = 0.785 + n\pi$ 與振動模態 $\tilde{\Phi}_n(\bar{x})$ ，並利用正交法解耦，可得出：

$$\xi_{0m}^{**} + (\bar{\omega}^2 + \gamma_m^4) \xi_{0m} = 0 \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \xi_{1m}^{**} + (\bar{\omega}^2 + \gamma_m^4) \xi_{1m} = (\hat{a}_{1U} a_1 - \nu) \xi_{0m}^* + (\hat{f} e^{i\tau} + \hat{a}_{0U^2} a_0) \hat{B}_m \\ - 2 \frac{\partial \xi_{0m}^*}{\partial T_1} - \hat{C}_m \xi_{0i} \xi_{0j} \xi_{0k} \int_0^1 \tilde{\Phi}_i(\bar{x}) \tilde{\Phi}_j(\bar{x}) \tilde{\Phi}_k(\bar{x}) \tilde{\Phi}_m d\bar{x} \quad (12) \end{aligned}$$

並令自然振動頻率為 $\omega_{n_A} = \sqrt{\bar{\omega}^2 + \gamma_m^4}$ 。為了找出振動主體內共振的條件，因此利用 Van Horssen [4] 所提出的數學技巧，求出在 $\bar{\omega} = 6.6751166$ 時，第一及第二模態有 1:3 的內共振情形。為求得其收斂解，故將式 (12) 之 Secular Terms 挑出，將其令為零，可得 Solvability Condition。吾人就可求出此系統在 Fixed Points (Steady State) 的頻率響應。

2.4 減振系統內共振之分析

由於加了減振器後，主體的自然振動頻率與無減振器的自然振動頻率有所不同，因此整個系統的自然振動頻率已不可能在 $\bar{\omega} = 6.6751166$ 時發生內共振現象發生，所以加減振器是有其成效的，並且在理論上無內共振情況發生。為求得其收斂解，故將式 (9) 之 Secular Terms 挑出，將其令為零，可得 Solvability Condition。可求出此系統在 Fixed Points (Steady State) 的頻率響應，並畫出此系統之振幅與微調頻率之頻率響應圖，觀察其是否有非線性內共振現象。

2.5 系統之穩定性分析

為了分析本 DVA 減振器在穩定性的應用，吾人刻意在本彈性樑系統中考慮一簡易的空氣動力之影響，並改變風速 U 的大小，並利用 Floquet Theory 來分析此系統。若無因次化的風速係數 \hat{a}_{1U} 大於 0.02

時，阻尼項會由正轉負，則系統將會有發散的現象。故本研究模型之發散速度為 $\hat{a}_{1U} = 0.02$ ，利用四階 Runge-Kutta 法求出具減振器系統之 Floquet Transition Matrix，搭配 F.M. 判定法則，可繪製出系統各個情況下的 Basin of Attraction 圖形，以此觀察系統在不同風速與端點減振器在不同質量及彈性係數組合下之穩定性。

三、結果與討論

本研究主要是針對一非線性內共振系統在受到簡諧外力及空氣動力影響下，改變減振器的質量與彈性係數，以避開內共振，降低系統之振幅，並增加系統之穩定性。本文利用無減振器之非線性系統的振幅與頻率關係繪製 Fixed Points 圖。吾人發現當以一簡諧外力激擾第一模態，其第一及第二模態之 Fixed Points 圖如圖 3 所示（橫軸為系統該模態，無因次共振頻率值的附近之微調頻率“ σ ”，縱軸為系統該模態之無因次振幅），在同一頻率下所對應的振幅不一定只有一個，若系統長時間處於此不穩定的區域下，將有可能導致系統疲乏毀壞，產生危險。而激擾第二模態，其第一及第二模態之 Fixed Points 圖如圖 4，雖然是激擾第二模態，但第一模態之振幅卻遠大於第二模態，此為非線性特有的內共振現象，證實了系統中第一、二模態存在 1:3 內共振。為驗證此 Fixed Points 圖的準確性，吾人將無減振器系統中的各個模態，在同一特定頻率下，時間域、Poincaré Map 驗證圖的振幅與 Fixed Points 圖的振幅是否一致，如圖 3~6。

吾人進一步分析減振器對於系統的減振效果，由加了減振器後主體的自然振動頻率與無減振器的自然振動頻率有明顯的不同在於 \hat{C}_{im} 。而

$$\hat{C}_{im} = \frac{q_{m1}}{q_{m1} + C_{im} q_{m2}}, \text{ 之中 } q_{m1}、q_{m2} \text{ 皆為常數，又因 } q_{m2} \text{ 是}$$

很小的質，所以 $C_{im} = \frac{\tilde{\omega}^2 \tilde{\Phi}_n(\bar{l})}{\tilde{\omega}^2 - \omega_{n_A}^2}$ 要很大才會對於減振器的自然振動頻率造成影響，因此 $\tilde{\omega}^2 \approx \omega_{n_A}^2$ 。若將減振器的彈性係數 ($\frac{\hat{k}}{EI} = \bar{m} \tilde{\omega}^2$) 分別固定在 0.1、0.05

及 0.005 時，可經由上述的關係式中，得出減振器質量 $\hat{m} \approx \frac{\bar{m} \tilde{\omega}^2 \cdot m}{\omega_{n_A}^2}$ ，則可繪出針對第一模態自然振動頻率

之 C_{i1} 與減振器質量、針對第二模態自然振動頻率之 C_{i2} 與減振器質量的關係圖，如圖 7~9，並看出分別的減振器最佳值範圍。並利用此減振器最佳值，製成不同減振器的彈性係數下分別激擾系統第一模態與第二模態的振幅表，如表 1~表 3。由表 1 上半部中可看出當 $\frac{\hat{k}}{EI} = 0.1$ 時，針對 C_{i1} 減振器有最佳質量為

0.003542633，其對無減振器振幅無因次化可得 Norm Amp. 為 $3.038\text{E}-04$ ，對於系統有極佳的減振效果。且可由表中下方左圖的趨勢中，看出質量有最佳減振範圍： $\hat{m} = 0.0035426 \sim 0.00354266$ ，當減振器質量在這個範圍內的減振效果極佳。另外表 1 下半部為針對 C_{i2} ，減振器質量應當有最佳值為 0.0003936259，但由表中下方右圖的趨勢中看出，雖然有求出的減振器最佳值，卻因減振器質量太小，不但無法對系統造成減振效果，反而還因本研究是端點減振器而導致系統振幅大增。表 2 和表 3 的結果皆與表 1 相似，將表 1~表 3 相比較後發現，減振器彈性係數越小，而質量的最佳範圍就會越小，所以當減振器彈性係數很小時，質量要非常趨近於最佳值，系統才會有好的減振效果。

吾人利用 Floquet Theory 找出無因次發散速度為 $\hat{a}_W = 0.02$ ，並以 F.M. 做為判定準則，若為不穩定狀況，就以一黑點表示之，若為穩定狀況，則不做任何標記，以之繪製成 Basin of Attraction 圖形。在幾乎不考慮無因次化風速之下，圖 10、11 是減振器彈性係數為 0.1 及減振器質量分別為最佳及較差的組合，圖 12 是減振器彈性係數為 0.05 及減振器質量為最佳值的組合，其中圖 10 的穩定區域比圖 11 的大很多，就比較出雖然相同風速、彈性係數，但因不同的減振器質量所造成的系統減振效果好壞，而導致穩定區域的大小具有明顯差異。且圖 10、12 顯示雖然減振器彈性係數不同，但因為有分別對應的質量最佳值，所以穩定區域大小幾乎相同。當無因次化風速到達發散速度 0.02 時，其穩定區域會變得非常小，如圖 13，顯示出風速越大所造成的不穩定區域越大。若是無因次化風速超過發散速度時，如圖 14、15，其中圖 15 已然沒有穩定區域，表示系統已經完全發散且說明其危險性。雖然理論上超過發散速度時系統應該要完全發散，但圖 14 顯示出如果減振器的質量趨近於最佳值，使系統減振效果極佳，是可以有限度的增加穩定區域範圍，使發散速度提高。另外，為了驗證 Basin of Attraction 的準確性，如圖 16 為無因次化風速到達發散速度時，穩定區域的初始條件 (0.0,-0.1)，並由第一模態及第二模態之 Time Response 和 Poincaré Map 為 Limit Cycle Oscillation (L.C.O.)，得證白色區塊確實為穩定區域。而圖 17 則是不穩定區域的初始條件 (0.0,0.0)，並由第一模態及第二模態之 Poincaré Map 為 Chaos，得證黑色區塊確實為不穩定區域，另外，其 Time Response 為 S.H.M.。圖 19 則是無因次化風速超過發散速度，其第一模態發散，第二模態穩定，顯示此系統具有鞍點。圖 20 是無因次化風速超過發散速度，其第一、第二模態皆發散。圖 16~20 其數

值模擬驗證結果皆與 Basin of Attraction 相符，可見本研究 Basin of Attraction 之準確性，並顯示發散的因素對於系統穩定性而言，也是設計上的一大考量。

四、結論

本研究以一彈性樑為主體架構，並以三次方非線性彈簧與線性阻尼模擬懸吊鋼纜，且將具時變函數之動態減振器，放置於此彈性樑的自由端，最後並加入空氣動力的影響，以探討其穩定性。此係多個模態耦合及並包含可能發生非線性內共振現象之系統，吾人藉由 MOMS 法、Fixed Points 圖、Time Response 圖、Poincaré Map 及 Floquet Theory 穩定性分析互相比較，驗證吾人理論的正確性，以提供學術及實務參考之用。最後，吾人對本研究提出以下結論：

1. 研究發現本系統具備內共振之可能。吾人利用數學分析並繪製出無減振器之 Fixed Points 圖，輔之以 Time Response、Poincaré Map 驗證主體之第一、第二模態確實存在 1:3 非線性內共振及其不穩定區域。
2. 本研究提出的方法可找出 DVA 之質量及彈性係數的組合，以避開內共振，並達到減振的效果。於不同減振器彈簧的彈性係數下，吾人可利用 C_{i1} 得到減振器質量之最佳範圍，其減振效果極佳。但由 C_{i2} 所得到之減振器質量，卻因為太小而使減振效果不彰。而減振器彈性係數越小，其所對應之減振器質量最佳範圍也越小。顯然的，以本系統而言，DVA 的質量及彈性係數的組合並非越大越好。
3. 從系統穩定性分析中可發現，雖然相同風速及彈性係數，卻會因不同的減振器之質量，而影響系統減振效果之優劣，導致其穩定區域的大小具有明顯差異。因此，若減振器之質量趨近於本文分析出之最佳值，可有限地增加原穩定區域範圍，使系統可承受之發散速度提高。

參考文獻

- [1] Nayfeh, A. H., and Mook, Dean T., *Introduction to Perturbation Techniques*, Wiley-Interscience, New York, 1981, pp.107-131.
- [2] Nayfeh, A. H., and Balachandran, B., *Applied Nonlinear Dynamics*, Wiley-Interscience, New York, 1995, pp.158-172.
- [3] Eftekhari, M., Ziaei-Rad, S., and Mahzoon, M., "Vibration Suppression of A Symmetrically Cantilever Composite Beam Using Internal Resonance Under Chordwise Base Excitation," *Journal of Non-Linear Mechanics*, Vol.48, 2013, pp.86-100.
- [4] Van Horssen, W. T., and Boertjens G. J., "On Mode Interactions for A Weakly Nonlinear Beam Equation," *Nonlinear Dynamic*, Vol.17, 1998,

pp.23-40.

- [5] Hijmissen, J. W., and Van Horssen, W. T., "On Aspects of Damping for A Vertical Beam with A Tuned Mass Damping at the Top," Springer Netherlands, *Nonlinear Dynamic*, Vol.50, 2007, pp.169-190.
- [6] Zou, L., and Nayfeh, S. A., "Minimax Optimization of Multi-Degree-of-Freedom Tuned-Mass Dampers," *Journal of Sound and Vibration*, Vol.272, 2004, pp.893-908.
- [7] Wang, Y. R., and Lin, H. S., "Stability Analysis and Vibration Reduction for A Two-Dimensional Nonlinear System," *International Journal of Structural Stability and Dynamics*, Vol.13, No.5, 2013.
- [8] Mindlin, R. D., and Goodman, L. E., "Beam Vibration with Time-Dependent Boundary Conditions," *ASME Journal of Applied Mechanics*, Vol.17, 1950, pp.377-380.

表 3 $\hat{k}/EI = 0.005$ 時，減振器質量對於振幅之影響

\hat{m}	1 st Mode Amp.	2 nd Mode Amp.	C_{12}^*	C_{12}^*	Norm. Amp.
No TVA	0.025000	0.02000000	0	0	1
0.00017713100	0.016000	0.00105000	1.06E+06	0.176777	0.21625
0.000177141500	0.009700	0.00065000	-1.71E+06	-0.176777	0.21025
0.000177141640	0.000042	0.00000400	-1.24E+08	-0.176777	0.0011575
0.000177131700	0.002100	0.00021000	1.65E+06	0.176777	0.071
0.000177131800	0.010000	0.00070000	1.51E+06	0.176777	0.2175
0.000177131900	0.015300	0.00101000	986179	0.176777	0.332
0.000019681292	0.380000	0.38000000	-1.58902	8.76E+06	40.1
0.000019681291	0.380000	0.38000000	-1.58902	1.08E+07	79.6
0.000019681291	0.380000	0.38000000	-1.58902	8.92E+07	16.35
0.000019681500	0.380000	0.38000000	-1.58902	-1.38E+05	9.725
0.000019682000	0.380000	0.07200000	-1.58902	-9.9E+4	9.4
0.000050000000	0.380000	0.06500000	1.96913	0.913031	9.225

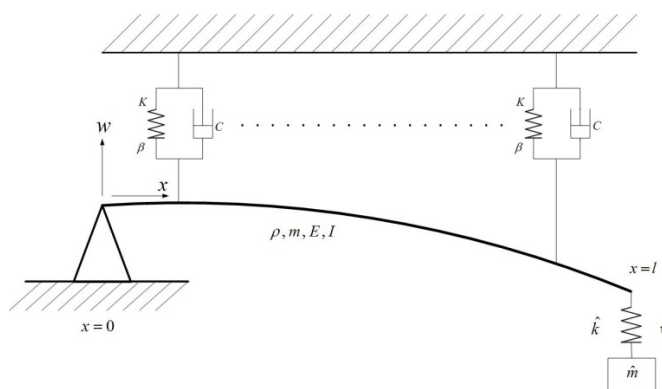


圖 1 具減振器之主體架構與邊界條件

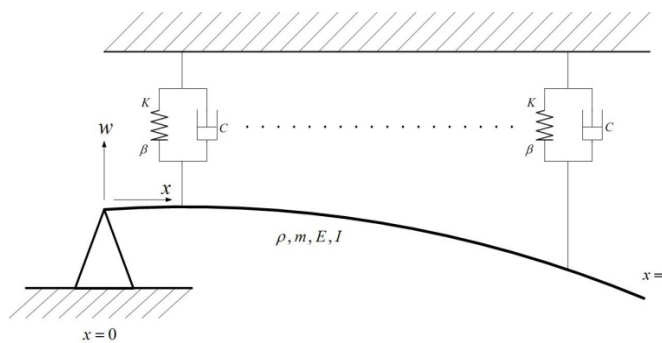


圖 2 無減振器之主體架構與邊界條件

表 1 $\hat{k}/EI = 0.1$ 時，減振器質量對於系統振幅之影響

\hat{m}	1 st Mode Amp.	2 nd Mode Amp.	C_{12}^*	C_{12}^*	Norm. Amp.
No TVA	0.025000	0.02000000	0	0	1
0.0005125000	0.021000	0.00150000	37189	0.176732	0.5172
0.0005426000	0.007500	0.00047000	-151691	-0.176726	0.11925
0.0005126310	0.000011	0.00000094	6.67E+07	0.176721	0.0001075
0.0005126310	0.000185	0.00001500	1.60E+06	0.176721	0.001075
0.0005426400	0.001150	0.00007800	724564	-0.176724	0.02495
0.0005426600	0.004300	0.00020000	185242	-0.176723	0.09325
0.0005916240	0.380000	0.38000000	-1.58781	616205	26.84
0.0005916258	0.380000	0.38000000	-1.58781	5.40E+06	16.15
0.0005926259	0.380000	0.38000000	-1.58781	1.85E+07	16.1
0.0005916262	0.380000	0.40000000	-1.58781	-2.18E+06	15.1
0.0005917000	0.380000	0.09000000	-1.58785	-7412.67	0.85
0.0005000000	0.380000	0.06500000	-1.64442	-5.24	9.225

表 2 $\hat{k}/EI = 0.05$ 時，減振器質量對於振幅之影響

\hat{m}	1 st Mode Amp.	2 nd Mode Amp.	C_{12}^*	C_{12}^*	Norm. Amp.
No TVA	0.025000	0.02000000	0	0	1
0.00017712900	0.018500	0.00118000	21193	0.176772	0.3995
0.00017714000	0.015000	0.00072000	-147895	-0.176761	0.418
0.00017711164	0.000028	0.00000210	-6.70E+07	-0.176759	0.0006125
0.00017713170	0.000350	0.00005100	2.55E+06	0.176759	0.006275
0.00017713200	0.004200	0.00015000	328879	-0.176727	0.04775
0.000177121200	0.008100	0.00070000	385239	0.176758	0.2855
0.0001968127	0.380000	0.38000000	-1.58908	1.99E+05	45.1
0.0001968128	0.380000	0.40000000	-1.58908	2.81E+05	20.1
0.0001968129	0.380000	0.38000000	-1.58908	1.00E+06	16.6
0.0001968150	0.380000	0.18000000	-1.58909	-1.34E+05	12.1
0.0001968200	0.380000	0.11500000	-1.58909	-9.41E5	10.475
0.000500000000	0.380000	0.06500000	-1.96803	-0.917942	9.225

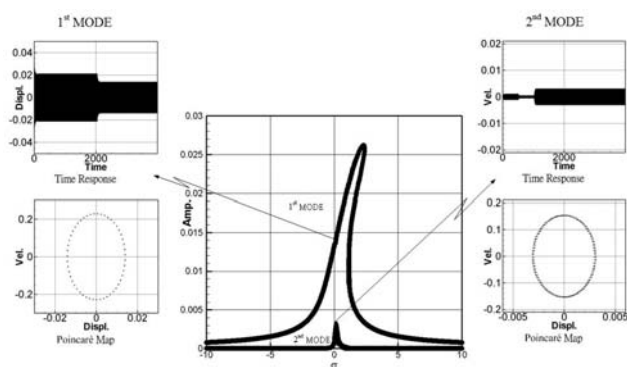


圖 3 $\sigma = 0$ 時，激擾第一模態之時間域驗證圖

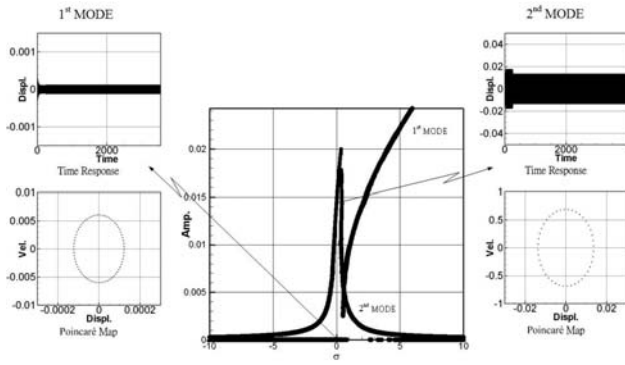


圖 4 $\sigma = 0$ 時，激擾第二模態之時間域驗證圖

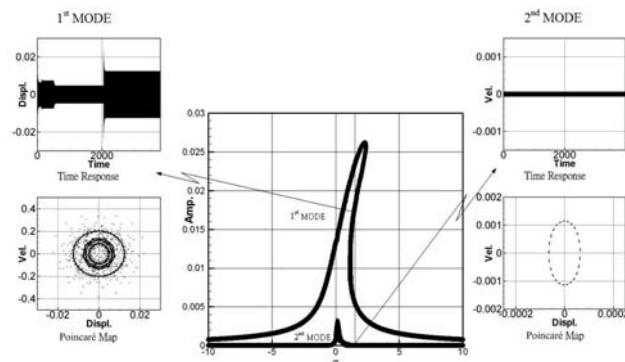


圖 5 $\sigma = 1.5$ 時，激擾第一模態之時間域驗證圖

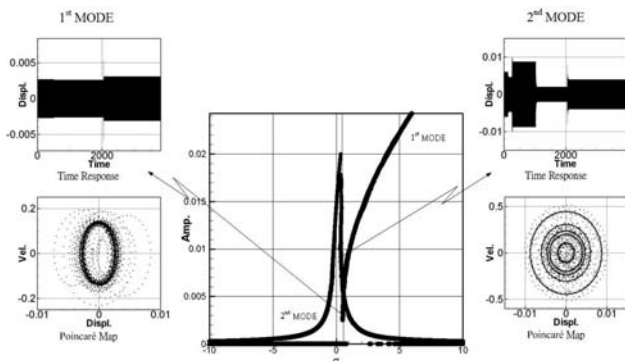


圖 6 $\sigma = 0.5$ 時，激擾第二模態之時間域驗證圖

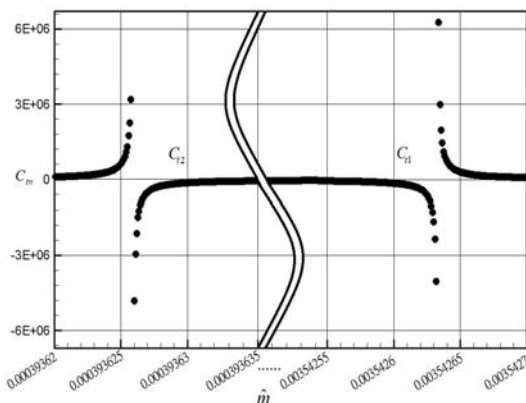


圖 7 $\hat{k}/EI = 0.1$ 時， C_m 與減振器質量 \hat{m} 的關係圖

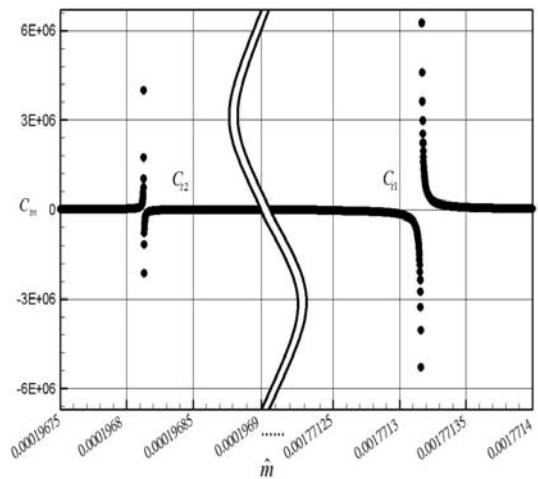


圖 8 $\hat{k}/EI = 0.05$ 時， C_m 與減振器質量 \hat{m} 的關係圖

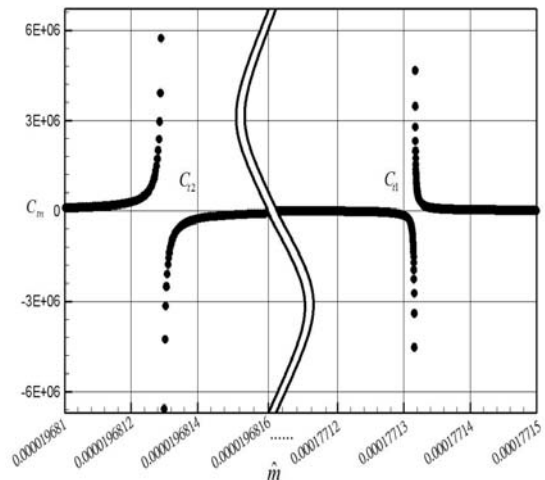


圖 9 $\hat{k}/EI = 0.005$ 時， C_m 與減振器質量 \hat{m} 的關係圖

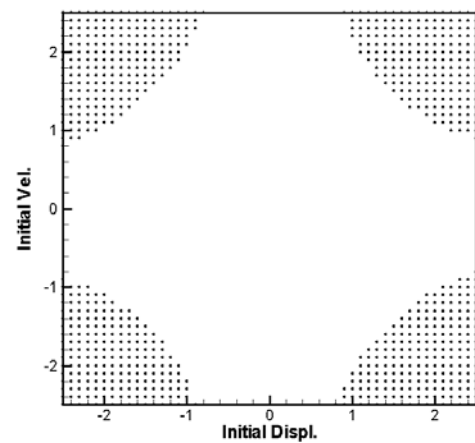


圖 10 $\hat{a}_{1U} = 0.0001$ ， $\hat{k}/EI = 0.1$ ， $\hat{m} = 0.003542633$ 之 Basin of Attraction

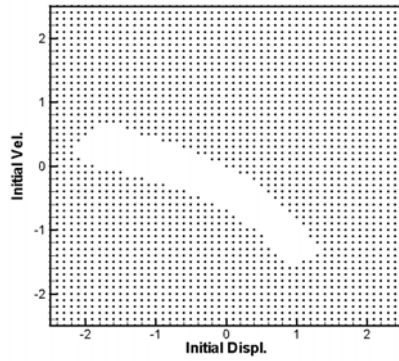


圖 11 $\hat{a}_U = 0.0001$, $\hat{k}/EI = 0.1$, $\hat{m} = 0.0003936259$ 之 Basin of Attraction

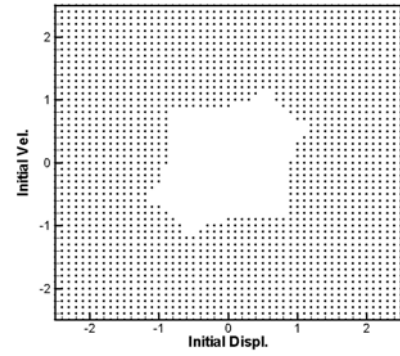


圖 14 $\hat{a}_U = 0.021$, $\hat{k}/EI = 0.1$, $\hat{m} = 0.003542633$ 之 Basin of Attraction

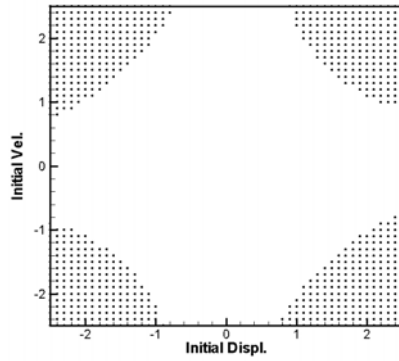


圖 12 $\hat{a}_U = 0.0001$, $\hat{k}/EI = 0.05$, $\hat{m} = 0.0017713164$ 之 Basin of Attraction

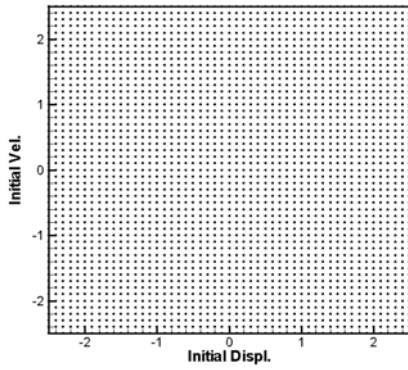


圖 15 $\hat{a}_U = 0.021$, $\hat{k}/EI = 0.1$, $\hat{m} = 0.0003936259$ 之 Basin of Attraction

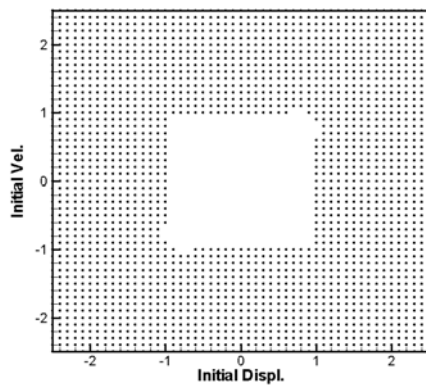


圖 13 $\hat{a}_U = 0.02$, $\hat{k}/EI = 0.1$, $\hat{m} = 0.003542633$ 之 Basin of Attraction

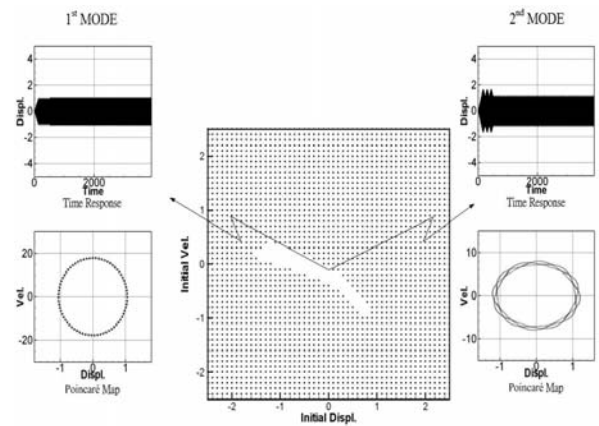


圖 16 $\hat{a}_U = 0.02$, $\hat{k}/EI = 0.1$, $\hat{m} = 0.0003936259$ 之 穩定區域的時間域、Poincaré Map 驗證圖

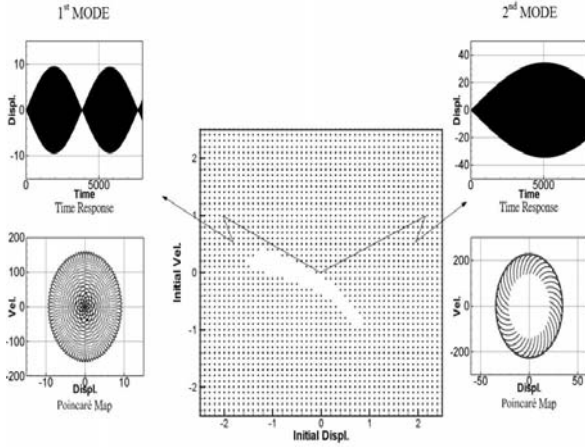


圖 17 $\hat{a}_{1U} = 0.02$, $\hat{k}/EI = 0.1$, $\hat{m} = 0.0003936259$ 之不穩定區域的時間域、Poincaré Map 驗證圖

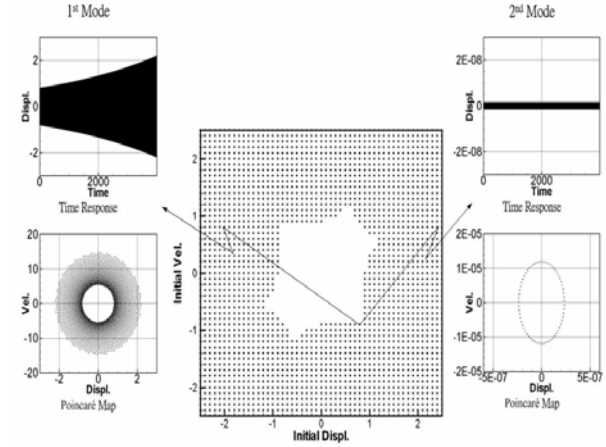


圖 19 $\hat{a}_{1U} = 0.021$, $\hat{k}/EI = 0.1$, $\hat{m} = 0.003542633$ 之穩定區域的時間域、Poincaré Map 驗證圖

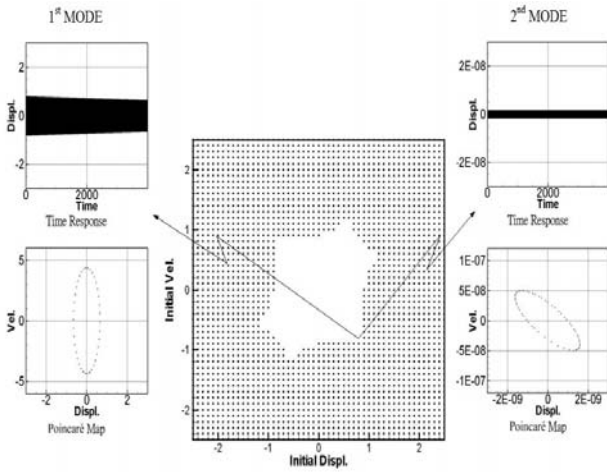


圖 18 $\hat{a}_{1U} = 0.021$, $\hat{k}/EI = 0.1$, $\hat{m} = 0.003542633$ 之穩定區域的時間域、Poincaré Map 驗證圖

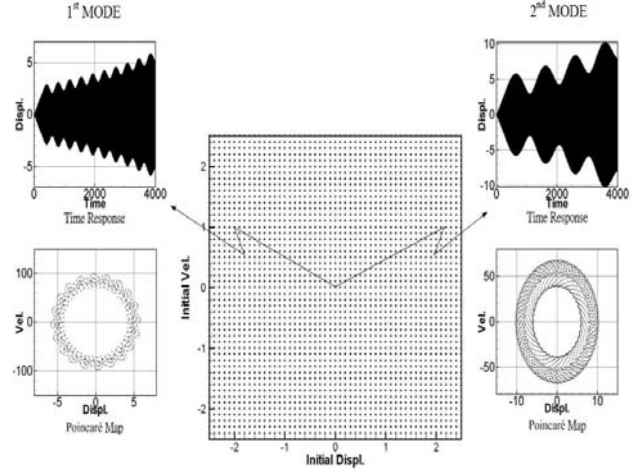


圖 20 $\hat{a}_{1U} = 0.021$, $\hat{k}/EI = 0.1$, $\hat{m} = 0.0003936259$ 之不穩定區域的時間域、Poincaré Map 驗證圖